Олексій ВАСИЛЬЄВ[1],
доктор фізико-математичних наук, професор,
ORCID ID: 0000-0001-7862-7792

[1] *Київський національний університету імені Тараса Шевченка*

Прийняття: 31/07/2025
Рецензія: 20/08/2025
Публікація: 30/09/2025

DOI: https://doi.org/10.53920/ES-2025-3-3

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВСТАНОВЛЕННЯ РІВНОВАГИ НА РИНКУ ПРАЦІ

JEL Класифікатор:
C02, C60, J20

Статтю присвячено питанню встановлення рівноваги на ринку праці. Для цього пропонується модель синергетичного типу, яка описує процес перерозподілу між зайнятими та безробітними. В основі моделі нелінійне диференціальне рівняння першого порядку, яке пов'язує зміну кількості зайнятих від поточної кількості зайнятих та безробітних. У рівняння також входять параметри, які описують ймовірності переходів між різними станами системи. Розглядаються ситуації, коли ймовірності переходів є сталими (не змінюються при зміні стану системи), та коли вони залежать лінійно від кількості зайнятих та безробітних. У всіх означених випадках вивчається питання щодо динаміки системи та можливості її переходу до стаціонарного стану (стану рівноваги).

У статті розкрито, що як у випадку постійних ймовірностей переходів, так і за умови залежності цих ймовірностей від кількості працюючих та безробітних, система має стійкий стаціонарний стан, в який вона переходить незалежно від початкових умов. Для демонстрації стійкості системи розглядається залежність ймовірностей переходів від кількості зайнятих та безробітних, та на підставі отриманого в результаті нелінійного диференціального рівняння виникає стаціонарний розв'язок, після чого цей розв'язок аналізується на предмет стійкості. Для відповідного диференціального рівняння знайдено точні (аналітичні) розв'язки та доведено стійкість стаціонарного стану. Результати дослідження можуть бути корисними при вивченні процесів встановлення рівноваги на ринку праці та при аналізі стійкості відповідних систем.

ISSN 2786-5339 (print)
ISSN 2786-5347 (online)

Ключові слова: *самоорганізація, синергетика, економічна модель, зайнятість, безробіття, стаціонарний стан.*

Oleksii VASYLIEV

MODELING THE PROCESS OF ESTABLISHING EQUILIBRIUM ON THE LABOR MARKET

The article is devoted to studying the process of establishing equilibrium in the labor market. For this purpose, a synergistic model is proposed that describes the redistribution process between the employed and the unemployed agents of the system. The model is based on a nonlinear first-order differential equation that relates the change in the number of employed agents to the current number of employed and unemployed agents. The equation also includes parameters that describe the probabilities of transitions between different states of the system. Situations are considered when the probabilities of transitions are constant (do not change when the state of the system changes), and when they depend linearly on the number of employed and unemployed agents. In all of the above cases, the question of the dynamics of the system and the possibility of its transition to a stationary state (an equilibrium state) is studied.

The paper shows that both in the case of constant transition probabilities and under the condition that these probabilities depend on the number of employed and unemployed, the system has a stable stationary state, to which it transitions regardless of the initial conditions. To demonstrate the stability of the system, the dependence of transition probabilities on the number of employed and unemployed agents is considered, and based on the resulting nonlinear differential equation, a stationary solution is obtained, after which this solution is analyzed for stability. Exact (analytical) solutions are found for the corresponding differential equation, and the stability of the stationary state is proven. The results of the study can be useful in studying the processes of establishing equilibrium in the labor market and in analyzing the stability of the corresponding systems.

Keywords: *self-organization, synergy, economic model, employment, unemployment, stationary state.*

Постановка проблеми. Сучасний макроекономічний аналіз стосується, у першу чергу, рівноважних станів економіки та особливостей формування таких станів [1, 2]. І хоча відповідні дослідження є джерелом цікавих і важливих знань, не менш важливими (але менш дослідженими) є питання, пов’язані з динамікою переходів системи між рівноважними станами [3, 4]. Пояснюється це різними факторами, проте головним з яких є специфіка економічної методології. Адже історично склалось так, що економічна наука завжди була орієнтована на пояснення фактично наявних процесів і систем [5, 6]. Також слід врахувати, що швидкість соціально-економічних процесів значно прискорилася лише в останні десятиліття, коли головні концептуальні підходи в економічній теорії уже було сформовано. Однак актуальність задач із вивчення динаміки економічних систем спонукала і спонукає дослідників пропонувати різні підходи, більшість з яких при цьому ґрунтується на використанні математичних моделей [4, 7 – 9]. Саме через це і тут доводиться стикатися з певними методологічними труднощами.

Справа в тому, що «класичне» використання математичних моделей зазвичай передбачає отримання точних математичних оцінок, які потім співставляються з реальними статистичними даними. Саме в економічних дослідженнях недоліком цього підходу є, в першу чергу, те, що не завжди вдається отримати статистичні чи інші емпіричні дані належної точності та достовірності, на основі яких можна було би перевірити адекватність та надійність математичної моделі. Безумовно, є сфери, де це не є особливою проблемою (наприклад, у фінансах), однак на загал тут стикаємось з певними принциповими проблемами. Водночас існує й інший підхід щодо використання математичних моделей у теоретичному економічному аналізі. Він передбачає використання якісних математичних моделей, зазвичай нелінійного типу, які дозволяють отримувати цікаві результати, при цьому не вдаючись до точних числових оцінок. Іншими словами, зазначений підхід використовує математичні моделі для отримання якісного, а не кількісного результату [10 – 12]. Ця обставина автоматично знімає фундаментальну проблему з необхідністю отримання точних емпіричних оцінок, оскільки результати моделі співставляються не з числовими даними, а з характером процесів чи оцінками явищ, причому ці оцінки, в основному, є не кількісними, а якісними. У певному сенсі, у таких випадках маємо справу з якісними теоріями, які сформульовані мовою математичних моделей. Слід також зазначити, що цей підхід добре зарекомендував себе не лише при дослідженні економічних явищ та систем, але й при вирішенні різноманітних завдань у інших галузях та сферах наукової та інженерної діяльності [13 – 16]. Тут цей підхід буде застосовано для аналізу процесів установлення рівноваги на ринку робочої сили.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед найважливіших робіт в області побудови математичних моделей для виконання якісного (не кількісного) аналізу можна виділити ключові дослідження в сфері синергетики, які власне й заклали основи методологічного підходу, який використовується у цій статті [10 – 16]. Проте слід розуміти, що запропонований у статті підхід не зовсім збігається з синергетичними методами досліджень. Адже основна мета синергетичних моделей полягає у сприянні дослідженню процесів самоорганізації у системах різної природи (серед них і соціально-економічних). При цьому не завжди все зводиться до самоорганізації. З іншого боку, цікавість викликає сам метод побудови відповідних моделей, оскільки можливості його застосування виходять далеко за межі саме синергетики. У цьому сенсі важливими є не лише суто наукові методи і результати, що отримуються у рамках синергетичної парадигми, але й методологічний бік питання. Низку статей присвячено адаптації таких підходів щодо вирішення теоретичних та прикладних завдань економіки [1 – 12, 15].

Що стосується вивчення питання ринку робочої сили, то основний пул досліджень в цій сфері традиційно стосується аналізу статистичних даних та визначенню на підставі цих даних певних рівноважних параметрів та характеристик. Безсумнівним є важливість таких досліджень, підкреслимо, що запропонований у роботі підхід стосується теоретичних аспектів встановлення рівноваги на ринку праці (за певних додаткових умов, сформульованих у процесі створення відповідної моделі).

Метою статті є створення математичної нелінійної моделі, яка описувала би процес встановлення рівноваги на ринку праці. Модель ґрунтуватиметься на нелінійному диференціальному рівнянні, яке визначатиме динаміку системи (кількість зайнятих у економіці). Результати моделі призначено для якісного аналізу економічних систем. Важливо відразу зазначити, що йтиметься виняткову про ринкові механізми встановлення рівноваги на ринку праці. Питання, пов'язані з адміністративним і законодавчо-політичним регулюванням трудових відносин і ринку праці як такого, залишаються поза межами моделювання.

Виклад основного матеріалу. Як зазначалося вище, основу моделі для визначення динаміки кількості занятих в економіці та аналізу процесу встановлення рівноваги складатиме диференціальне рівняння, яке ми сформулюємо, виходячи із загальних макроекономічних міркувань. Але попередньо введемо низку позначень. А саме, позначимо через $\mathrm{n}_1(\mathrm{t})$ кількість занятих в економіці в момент часу t. Кількість безробітних позначимо через $\mathrm{n}_2(\mathrm{t})$. Також вважатимемо, що загальна кількість працюючих і безробітних є сталою (тобто не змінюється з часом):

$$n_1(t) + n_2(t) = n = const. \quad (1)$$

Іншими словами, в рамках запропонованого підходу кожен економічний агент може бути або безробітним, або працюючим, і може переходити з одного стану в інший. Визначивши закони переходу між цими станами, отримаємо диференціальне рівняння, яке визначатиме процеси, що відбуваються в системі. У першу чергу ми сконцентруємось на тому, від чого і як залежить зміна кількості економічних агентів, які перебувають у певному стані. Якщо розглядати невеликі проміжки часу і оцінювати відношення зміни кількості економічних агентів у певному стані до проміжку часу, то отримаємо те, що можна було би назвати швидкістю зміни кількості економічних агентів у цьому стані. З математичної точки зору це похідна – тобто величини $\frac{dn_1}{dt}$ та $\frac{dn_2}{dt}$ є похідними по часу t від функцій $n_1(t)$ та $n_2(t)$ і характеризують швидкість зміни кількості економічних агентів відповідно у першому (зайняті) та другому (безробітні) станах. Далі, позначимо через W_{12} ймовірність переходу економічного агенту зі стану 1 до стану 2 (ймовірність для безробітного знайти роботу), а через W_{21} позначимо ймовірність переходу зі стану 2 в стан 1 (ймовірність втратити роботу й стати безробітним). Тоді ми можемо записати таке співвідношення для швидкості зміни кількості економічних агентів у першому стані (швидкість зміни кількості зайнятих):

$$\frac{dn_1}{dt} = W_{21}n_2 - W_{12}n_1. \tag{2}$$

Загалом, можна було би записати аналогічне співвідношення для зміни кількості безробітних:

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12}n_1 - W_{21}n_2, \tag{3}$$

але насправді воно не є незалежним і не містить додаткової інформації, оскільки через співвідношення (1) можемо подати $n_2(t) = n - n_1(t)$, що дозволить отримати з рівняння (2) рівняння (3) і навпаки. Також варто зазначити, що автоматично виконується таке співвідношення:

$$\frac{dn_1}{dt} + \frac{dn_2}{dt} = 0. \tag{4}$$

Для розв'язання диференційного рівняння (2) (чи еквівалентного йому рівняння (3)) необхідно зробити певні уточнення щодо ймовірностей W_{12} та W_{21}. У найпростішому випадку ці параметри є константами (у тому сенсі, що не залежать від розподілу економічних агентів за станами). Якщо так, то з урахуванням того, що насправді

$$\frac{dn_1}{dt} = nW_{21} - (W_{12} + W_{21})n_1, \tag{5}$$

отримуємо розв'язок

$$n_1(t) = \frac{W_{21}n}{W_{12}+W_{21}} + \exp(-(W_{12}+W_{21})t)\left(N_1 - \frac{W_{21}n}{W_{12}+W_{21}}\right), \tag{6}$$

$$n_2(t) = \frac{W_{12}n}{W_{12}+W_{21}} - \exp(-(W_{12}+W_{21})t)\left(N_1 - \frac{W_{21}n}{W_{12}+W_{21}}\right), \tag{7}$$

де через N_1 позначено кількість економічних агентів у першому стані (зайняті) у початковий момент (тобто $n_1(0) = N_1$).

Навіть у такому, найпростішому випадку, маємо досить цікавий результат, який свідчить про те, що незалежно від початкового стану системи (значення N_1) вона перейде у рівноважний стан $n_1 = n_0$, який визначається співвідношенням

$$n_0 = \frac{W_{21}}{W_{12}+W_{21}}n. \tag{8}$$

Йому відповідає рівень безробіття

$$\frac{n_2}{n} = \frac{W_{12}}{W_{12}+W_{21}}. \tag{9}$$

Як при цьому встановлюється рівновага (за умови різних початкових станів системи), подано на рис. 1. Для розрахунків взято значення для рівня безробіття $\frac{n_2}{n}$ = 0.15 (відповідно, $\frac{n_2}{n}$ = 0.85), пунктирна лінія відповідає значенню $N_1 = 0.1n$, штрихована лінія відповідає значенню $N_1 = 0.6n$, штрих-пунктирна лінія відповідає значенню $N_1 = 0.95n$, пряма суцільна лінія відповідає значенню $N_1 = 0.85n$.

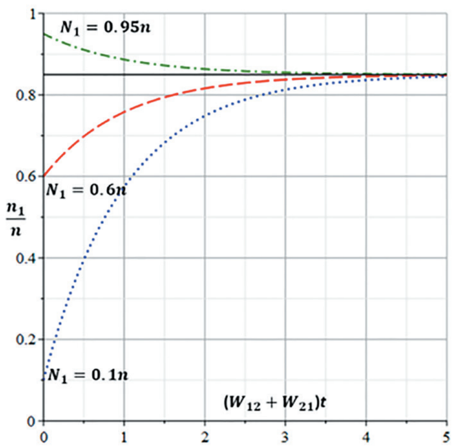

Рис. 1. Встановлення рівноваги в системі за різних початкових умов

Джерело: власні розрахунки автора

Дещо складнішою є ситуація, якщо ймовірності W_{12} та W_{21} залежать від стану системи, а саме, від фактичних значень параметрів n_1 та n_2. У загальному випадку можемо вважати, що ці ймовірності є функціями від n_1 та n_2 (при цьому слід пам'ятати, що самі параметри не є незалежними і для них має місце співвідношення (1)).

$$W_{12}(n_1, n_2) \approx W_{12}^{(0)} + a_1 n_1 + b_1 n_2 = W_{12}^{(0)} + b_1 n + (a_1 - b_1) n_1, \quad (10)$$

$$W_{21}(n_1, n_2) \approx W_{21}^{(0)} + a_2 n_1 + b_2 n_2 = W_{21}^{(0)} + b_2 n + (a_2 - b_2) n_1. \quad (11)$$

Вирази (10)-(11) фактично є розкладами в ряд Тейлора залежностей $W_{12}(n_1,n_2)$ та $W_{21}(n_1,n_2)$ до лінійних доданків з урахуванням співвідношення (1). Коефіцієнти $W_{12}^{(0)}$, $W_{21}^{(0)}$, $a_{1,2}$ та $b_{1,2}$ є феноменологічними параметрами моделі і в принципі можуть бути як додатними, так і від'ємними.

Як і раніше, нам достатньо дослідити динаміку лише одного з параметрів $n_1(t)$ чи $n_2(t)$. Динаміка іншого параметра визначається зі співвідношення (1). Тому розглянемо залежність $n_1(t)$, яка визначатиметься таким рівнянням:

$$\frac{dn_1}{dt} = k_1 - k_2 n_1 - k_2 n_1^2, \quad (12)$$

де для зручності використано такі позначення:

$$k_1 = \left(W_{21}^{(0)} + b_2 n\right) n, \quad (13)$$

$$k_2 = W_{12}^{(0)} + W_{21}^{(0)} + (b_1 + 2b_2 - a_2) n, \quad (14)$$

$$k_3 = a_1 + a_2 - b_1 - b_2. \quad (15)$$

У принципі, параметри $k_m (m = 1,2,3)$ можуть бути як додатними, так і від'ємними, що якісно впливатиме на характер поведінки системи. Разом з тим, якщо розглядати розклади (10) та (11) як певну поправку до випадку (5), то можна вважати, що параметри $k_1 > 0$ та $k_2 > 0$. Таке обґрунтоване припущення дозволяє нам, шляхом заміни змінних, спростити базове рівняння (12). Зокрема, поклавши $n_1 = \frac{k_1 x}{k_2}$ та $t = \frac{\tau}{k_1}$, отримаємо таке рівняння:

$$\frac{dx}{d\tau} = 1 - x(\tau) - \lambda x(\tau)^2, \quad (16)$$

де параметр $\lambda = \frac{k_1 k_3}{k_2^2}$. Це рівняння має стаціонарний розв'язок (тобто розв'язок, який не залежить від часу з урахуванням очевидного обмеження $x(\tau) \geq 0$):

$$x_0 = \frac{\sqrt{1+4\lambda}-1}{2\lambda}. \quad (17)$$

Цей розв'язок визначатиме кінцевий (стаціонарний) стан системи – тобто той стан, до якого система еволюціонуватиме незалежно від початкової умови $x(0) = N_1$.

Для аналізу стаціонарного розв'язку покладемо $x(\tau) = x_0 + \xi(\tau)$. Для невідомої функції $\xi(\tau)$ отримаємо таке:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\xi(\tau)(\lambda\xi(\tau) + \sqrt{1+4\lambda}). \quad (18)$$

Фактично, $\xi(\tau)$ визначає відхилення від стаціонарного розв'язку. Це рівняння має аналітичний розв'язок

$$\xi(\tau) = \frac{\xi_0}{(1+\lambda\xi_0)\exp(\sqrt{1+4\lambda}\tau) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+4\lambda}}}, \quad (19)$$

де $\xi(\tau) = \xi(0)$ є початковим відхиленням від рівноважного значення.

Легко зрозуміти, що вираз (19) з часом прямує до нуля незалежно від початкового значення ξ_0. Це, фактично, означає, що система повертається до стану рівноваги, який визначається співвідношенням (17). Отже, навіть у випадку, коли параметри моделі W_{12} та W_{21} залежать від параметра n_1, залишається справедливим висновок про те, що система еволюціонує до рівноважного стану незалежно від того, в якому стані вона перебуває у початковий момент.

Водночас, важливо звернути увагу, що описаний вище сценарій реалізується у випадку, якщо має місце співвідношення $1 + 4\lambda \geq 0$, тобто коли вираз, що стоїть під коренем, є невід'ємним. Це насправді означає, що система є стійкою за умови

$$\lambda \geq -\frac{1}{4}. \quad (20)$$

Виконання цієї умови не є автоматичним, з огляду на співвідношення (15). Іншими словами, цілком можливо, що параметр λ може бути не просто від'ємним, а навіть таким, що умова (20) порушується. У такому випадку співвідношення (17), яке визначає стаціонарний розв'язок системи, втрачає сенс. Це, своєю чергою, означає, що в системи не буде стаціонарного стану.

Висновки та пропозиції. Запропонована в роботі модель на основі нелінійного диференціального рівняння описує процес встановлення рівноваги на ринку праці і розглядає цей процес як послідовність переходів між двома станами економічних агентів: станом безробіття та станом зайнятості. У статті показано, що така система має стаціонарний стан, до якого з часом переходить система. Цей стан є динамічним у тому сенсі, що переходи між двома станами агентів (безробіття та занятість) відбуваються, але при цьому інтенсивності переходів такі, що вони компенсують один одного і загальна кількість безробітних і занятих у системі залишається незмінною. Також стан рівноваги є стійким і виведення системи зі стану рівноваги з часом нівелюється й система повертається до рівноважного стану безвідносно до початкового відхилення.

Також доведено, що, навіть, коли ймовірності переходів між станами агентів залежать від кількості зайнятих чи безробітних, загальний висновок залишається незмінним: система має стійкий стан рівноваги. Разом з тим, тепер, залежно від значень керуючих параметрів (феноменологічних параметрів, що входять до відповідної моделі), можлива ситуація, коли система не має стійкого стаціонарного стану.

ЛІТЕРАТУРА

1. Blanchard O.J., Johnson D.R. (2013). Macroeconomics. New York: Pearson. 553 p.

2. Romer D. Advanced Macroeconomics (2019). New York: McGraw-Hill India, 736 p.

3. Wei-Bin Zhang (1991). Synergetic Economics. Time and Change in Nonlinear Economics, Berlin: Springer. 246 p.

4. Вітлінський В.В. (2007). Моделювання економіки, К.: КНЕУ. 408 с.

5. Hunt E.K. (2011). History of economic thought: a critical perspective. New York: Armonk. 610 p.

6. Robbins L. (2000). A History of Economic Thought. Princeton: Princeton University Press. 393 p.

7. Samuelson P.A. (1983). Foundations of Economic Analysis. Harvard: Harvard University Press. 604 p.

8. Chiang A.C., Wainwright K. (2005). Fundamental Methods of Mathematical Economics. New York: McGraw-Hill. 701 p.

9. Melkumian A. (2011) Mathematical Economics. Oxfordshire: Routledge. 224 p.

10. Васильєв О.М. Синергетичні підходи в економічній теорії. *Економіка України*. 2007. №5. С. 75.

11. Васильєв О.М. Синергетична модель саморегулювання ринку праці в умовах кризи. *Банківська справа*. 2013. № 6. С. 91.

12. Васильєв О.М. Синергетичні підходи в антикризовому регулюванні. *Економіка України*. 2010. №9. С. 34.

13. Haken H. (2012). Synergetics: Introduction and Advanced Topics. Heidelberg: Springer. 764 p.

14. Prigogine I., Stengers I. (1984). Order Out of Chaos: Man's New Dialogue with Nature. New York: Bantam. 448 p.

15. Васильєв О.М., Чалий О.В. Моделювання макроекономічної динаміки методами еконофізики. *Журнал фізичних досліджень*. 2013. Т. 17. №4. С. 4801.

16. Сугаков В. Й. (2001). Основи синергетики. Київ: Обереги. 287 с.

REFERENCES

1. Blanchard O.J., Johnson D.R. (2013). Macroeconomics. New York: Pearson. 553 p.

2. Romer D. Advanced Macroeconomics (2019). New York: McGraw-Hill India. 736 p.

3. Wei-Bin Zhang (1991). Synergetic Economics. Time and Change in Nonlinear Economics, Berlin: Springer. 246 p.

4. Vitlinskyi V.V. (2007). Modeling of the economy, Kyiv: KNEU. 408 p.

5. Hunt E.K. (2011). History of economic thought: a critical perspective. New York: Armonk. 610 p.

6. Robbins L. (2000). A History of Economic Thought. Princeton: Princeton University Press. 393 p.

7. Samuelson P.A. (1983). Foundations of Economic Analysis. Harvard: Harvard University Press. 604 p.

8. Chiang A.C., Wainwright K. (2005). Fundamental Methods of Mathematical Economics. New York: McGraw-Hill. 701 p.

9. Melkumian A. (2011) Mathematical Economics. Oxfordshire: Routledge. 224 p.

10. Vasyliev O.M. Synergetic approaches in economic theory. *Economy of Ukraine*. 2007. No 5. P. 75.

11. Vasiliev O.M. Synergetic model of self-regulation of the labor market in times of crisis. *Banking*. 2013. No 6. P. 91.

12. Vasyliev O.M. Synergetic approaches in anti-crisis regulation. *Economy of Ukraine*. 2010. No 9. P. 34.

13. Haken H. (2012). Synergetics: Introduction and Advanced Topics. Heidelberg: Springer. 764 p.

14. Prigogine I., Stengers I. (1984). Order Out of Chaos: Man's New Dialogue with Nature. New York: Bantam. 448 p.

15. Vasiliev O.M., Chaly O.V. Modeling macroeconomic dynamics using econophysics methods. *Journal of Physical Studies*. 2013. V. 17, No 4, P. 4801.

16. Sugakov V. Y. (2001). Fundamentals of Synergetics. Kyiv: Oberegi. 287 p.